等式・不等式の証明での注意

次のような証明問題を考えましょう。誰でも一度は学習する有名な証明問題ですね。そこで，よく見かける解答例に次のようなものがあります。

問題 1　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ のとき，等式　$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a+c+e}{b+d+f}$　が成り立つことを証明せよ。

(証明)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=k$　と置くと，$a=ka$，$c=kd$，$e=kf$　だから，

これらを証明すべき等式に代入して，

$$\frac{ka+kd}{b+d}=\frac{ka+kd+kf}{b+d+f}$$

ゆえに　$\dfrac{k(a+d)}{b+d}=\dfrac{k(a+d+f)}{b+d+f}$

従って　　$k=k$

これから等式は成立する。　　(証明終)

問題 2　次の不等式を証明せよ。

$$x^2-4xy+5y^2\geqq 6y-9$$

(証明) 左辺から右辺を引いて

$x^2-4xy+5y^2-6y+9\geqq 0$

$x^2-4xy+4y^2+y^2-6y+9\geqq 0$

$(x-2y)^2+(y-3)^2\geqq 0$

ゆえに　不等式は成り立つ。　　(証明終)

この様な間違いは，大変多く見られます。解答した本人は出来たと思っているのですが，正解にはなりません。

証明問題では，仮定からスタートして 3 段論法をくり返し用いて，結論を導かないといけません。

問題 1 では最初から等式を付けたまま両辺を変形していますから，正しい証明にはなっていませんね。(左辺)−(右辺)を変形していって最終的に 0 であることを示すか, (左辺)と(右辺)を別々に変形してどちらもkになることを示す，というのが正しい記述になります。

問題 2 では　(左辺)−(右辺)≧0　を示すという方針は正しいのですが,「≧0」を最初から付けていたのでは，1 行目で結論が出ているということになります。

(左辺)−(右辺)を変形していって，$(x-2y)^2+(y-3)^2$の形になって初めて「≧0」とわかるのですから，注意が必要です。初歩的なミスですが，証明に不慣れだとこのような記述をしてしまいます。説得力のある記述ができるように十分に演習しておきましょう。